程式設計1C e-tutor 2-1 交點座標的推導

留言

丁培毅

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 3 & (1) \\ a(x-1) - by = 0 & (2) \end{cases}$$

版本一

$$(2)\text{式} \Longrightarrow x = \frac{b}{a}y + 1 \qquad (3)$$

代入 (1) 式，得到

$$\left(\frac{b}{a}y + 1\right)^2 + 4y^2 = 3$$

展開化簡得到

$$\frac{b^2}{a^2}y^2 + \frac{2b}{a}y + 1 + 4y^2 = 3$$

整理一下成為一個 y 的一元二次方程式

$$\left(\frac{b^2}{a^2} + 4\right)y^2 + \frac{2b}{a}y - 2 = 0$$

以公式解得到

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{-\frac{2b}{a} + \sqrt{(\frac{2b}{a})^2 + 8(\frac{b^2}{a^2} + 4)}}{2(\frac{b^2}{a^2} + 4)} \\ y_2 = \dfrac{-\frac{2b}{a} - \sqrt{(\frac{2b}{a})^2 + 8(\frac{b^2}{a^2} + 4)}}{2(\frac{b^2}{a^2} + 4)} \end{cases} \tag{4}$$

上面的式子分子分母同乘 a^2 可以簡化一點

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{-2ab + \sqrt{4a^2b^2 + 8(a^2b^2 + 4a^4)}}{2(b^2 + 4a^2)} \\ y_2 = \dfrac{-2ab - \sqrt{4a^2b^2 + 8(a^2b^2 + 4a^4)}}{2(b^2 + 4a^2)} \end{cases} \tag{5}$$

再運用 (3) 式求出 y_1 對應的 x_1 以及 y_2 對應的 x_2

版本二

$$(2)\text{式} \Longrightarrow y = \frac{a}{b}(x-1) \tag{6}$$

代入 (1) 式，得到

$$x^2 + 4\frac{a^2}{b^2}(x-1)^2 = 3$$

展開化簡得到

$$x^2+4\frac{a^2}{b^2}x^2-8\frac{a^2}{b^2}x+4\frac{a^2}{b^2}=3$$

整理一下成為一個 x 的一元二次方程式

$$(1+4\frac{a^2}{b^2})x^2-8\frac{a^2}{b^2}x+(4\frac{a^2}{b^2}-3)=0 \qquad (7)$$

以公式解得到

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{8\frac{a^2}{b^2}+\sqrt{(8\frac{a^2}{b^2})^2-4(1+4\frac{a^2}{b^2})(4\frac{a^2}{b^2}-3)}}{2(1+4\frac{a^2}{b^2})} \\ x_2=\dfrac{8\frac{a^2}{b^2}-\sqrt{(8\frac{a^2}{b^2})^2-4(1+4\frac{a^2}{b^2})(4\frac{a^2}{b^2}-3)}}{2(1+4\frac{a^2}{b^2})} \end{cases} \qquad (8)$$

上面的式子分子分母同乘 b^2 可以簡化一點

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{8a^2+\sqrt{64a^4-4(b^2+4a^2)(4a^2-3b^2)}}{2(b^2+4a^2)} \\ x_2=\dfrac{8a^2-\sqrt{64a^4-4(b^2+4a^2)(4a^2-3b^2)}}{2(b^2+4a^2)} \end{cases} \qquad (9)$$

再運用 (6) 式求出 x_1 對應的 y_1 以及 x_2 對應的 y_2

注意:

上面是手動的推導，當然也可以繼續推導下去，在版本一裡把 x_1 和 x_2 用 a, b 表示出來，在版本二裡把 y_1 和 y_2 用 a, b 表示出來，但是對我們寫程式實作這個方法來說，需要評估一下到底要推

導到什麼地步，以版本二來說會不會推導到 (7) 式就夠了，也就是在程式裡由 a, b 計算出二次方程式 $Ax^2 + Bx + C = 0$ 的係數 A, B, C，接下來在程式裡運用公式

$$\frac{-B \pm \sqrt{B^2 + 4AC}}{2A}$$

計算兩個根。
如果推導到 (9) 式，程式裡可以直接從 a, b 計算出 x_1 和 x_2，好像比較單純，不需要引入前面的 A, B, C 變數，但是仔細評估一下，推導到複雜的 (9) 式時人為犯錯的機會還蠻大的，(9) 式要轉換成程式碼也因為有點複雜所以蠻容易出錯的，這樣子考量的話，多用三個變數其實是可以接受的，寫程式時比較不會出錯，寫出來的程式別人也比較容易看懂。
如果從 (9) 式再往下手動推導出 y_1, y_2 和 a, b 的直接關係，似乎又更容易犯錯了，在程式裡要算出 x_1 和 x_2 應該在算出 y_1, y_2 以後直接運用 (6) 式，直接用 a, b 和 x_1 算出 y_1，用 a, b 和 x_2 算出 y_2。