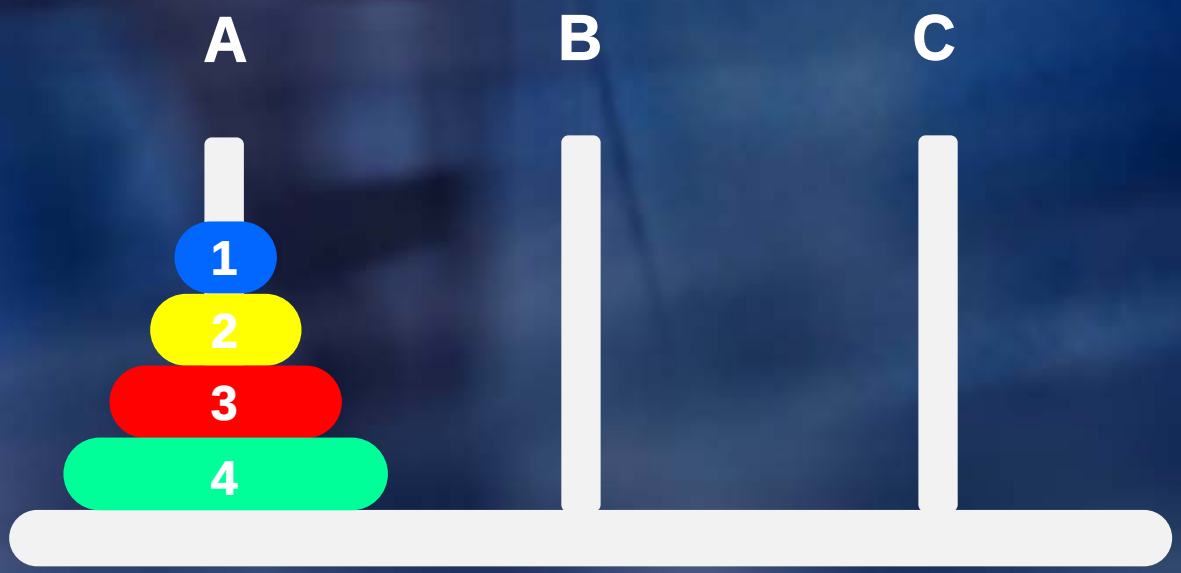
河內塔 Towers of Hanoi

- 將一疊由小到大的的盤子由一個柱子上移到另外一個柱子上，並且維持原來的順序：
  - 每一個步驟只能移動一個盤子
  - 任何時候，大的盤子不可以放在比它小的盤子之上
  - 有一個輔助的柱子可以使用



程式輸出

1, A -> B	1, B -> C
2, A -> C	2, B -> A
1, B -> C	1, C -> A
3, A -> B	3, B -> C
1, C -> A	1, A -> B
2, C -> B	2, A -> C
1, A -> B	1, B -> C
4, A -> C	

- a. void move(char from_peg, char to_peg, char aux_peg, int nDisks)
  b. 印出由 from_peg 柱子搬 nDisks 個盤子到 to_peg 柱子的步驟，過程中以 aux_peg 柱子為輔助，避免大盤子在小盤子之上
  c. 拆解為三個小一點的問題: 2 個 nDisks-1 以及 1 個直接移動
  d. 由子問題的解合成整個問題的解:
  運作條件: aux_peg 柱子上如果有盤子的話, 需要大於 from_peg 柱子上最上面的 nDisks-1 個盤子, to_peg 柱子上如果有盤子的話,需要大於 from_peg 柱子上最上面的 nDisks 個盤子
  ① 由 from_peg 柱子搬 nDisks-1 個盤子到 aux_peg 柱子
  ② 由 from_peg 柱子搬 1 個盤子到 to_peg 柱子
  ③ 由 aux_peg 柱子搬 nDisks-1 個盤子到 to_peg 柱子
  假設原來 to_peg 柱子以及 aux_peg 柱子上沒有比 from_peg 柱子最上面算起第 nDisks 個盤子小的盤子, 所以可以用上面的三個步驟來完成; 接下來考慮過程中兩次移動 nDisks-1 個盤子, 在三個柱子上也沒有比這 nDisks-1 個盤子小的, 所以可以再用上面的三個步驟來完成
  e. nDisks=1 時: to_peg 柱子上的盤子比 from_peg 柱子上第一個盤子大的話, 直接搬移

程式輸出

Move top 3 disks from peg B to peg C using peg A as auxiliary peg

move('B', 'C', 'A', 3);

	1, B -> C	move('B','C','A',1);
move('B','A','C',2);	2, B -> A	move('B','A','C',1);
	1, C -> A	move('C','A','B',1);
move('B','C','A',1);	3, B -> C	
	1, A -> B	move('A','B','C',1);
move('A','C','B',2);	2, A -> C	move('A','C','B',1);
	1, B -> C	move('B','C','A',1);

Tower of Hanoi (cont'd)

```
01 void move(char from_peg,  /* input - characters naming          */
02           char to_peg,    /*           the problem's            */
03           char aux_peg,   /*           three pegs               */
04           int  nDisks)  {  /* input - number of disks to move */
05     if (nDisks == 1) {
06         printf("Move disk 1 from peg %c to peg %c\n", from_peg, to_peg);
07     } else {
08         move(from_peg, aux_peg, to_peg, nDisks - 1);
09         printf("Move disk %d from peg %c to peg %c\n", nDisks, from_peg, to_peg);
10         move(aux_peg, to_peg, from_peg, nDisks - 1);
11     }
12 }
```

請注意這樣子移動的次數一定是最少的, 如果是只有一個碟子時, 只要移動 $a_1 = 1$ 次, 如果只有兩個碟子時, 只要移動 $a_2 = 3$ 次, ..., 如果有 **n** 個碟子時, 你知道最大的碟子至少要移動 **1** 次, 但是在移動它之前, 要把上面 **n-1** 個碟子都先移到輔助的柱子上 **(**由 **from_peg** 到 **aux_peg)**, 那麼最少要移動 a_{n-1} 次, 然後移動最大的碟子 **(**由 **from_peg** 到 **to_peg)**, 然後再把輔助的柱子上面的 **n-1** 個碟子移到目標柱子上, 又需要 a_{n-1} 次, 總共需要移動 $a_n = 2\,a_{n-1} + 1$ 次